510. 單葉冪級數ノ係數問題ニツイテ

城　憲三（阪大工）

(S) ヲ單位円 $|z|<1$ ニ於ケル正則單葉函數

(1)　$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$

ノ集合トスル。

本稿ハ (S) ノスベテノ函數ニ對シ $|a_n|\leqq n$ $(n=2,3,\cdots\cdots)$ ナルベシト云フ有名ナ *Bieberbach* ノ *Vermutung* ノ證明ヲ與フル一助トナルノデハナカラウカ。

K. Löwner ハ Math. Annalen 89, (1923), 101—121 ニ於テ、係數 a_n $(n=2,3,\cdots\cdots)$ ニ對スル徹底的ナ研究ヲナシタコトハ周知ノコトデアル。即チ彼ハ (S) ノスベテノ函數ハ $|z|<1$ ヲ *Schlitzbereich* = *abbilden* スルヤウナ函數デ近似出來ルコトヲ示シ（*Carathéodory* ノ定理ヲ用ヒテ），(S) ノ代リニ (S) ノ *Unterklasse* トナル *Schlitzabbildung* ヲナス函數ノミノ集合ヲ今 (Sch) トスルナラバ，(Sch) ノスベテノ函數ニハ必ラズ $K(\tau)$ $(\tau\geqq 0)$ ナル絶對値 1 ナル連續函數ガ對應シ，コノ *parameter* ノ函數 $K(\tau)$ ヲ用ヒテ a_n $(n=2,3,\cdots\cdots)$ ノ

表示式ヲ得ルコトニ成功シタ。

K. Löwner ハ逆ニ，任意ニ $K(\tau)$ ナル絶對値 1 ナル連續函數（有限箇ノ不連續点ヲ有スルコトヲ得）ニハ又 (S) ノ函数ガ對應スルコトモ示シ、ソノ際起ズル函数ハ (Sch) ニ屬スルトハ限ラヌト報ジテヰル。(Löwner, S.117)

今々最近ニ到リ，J. Basilewitch ハ論文：Zum Koeffizientenproflem der schlichten Function, Recueil Mathématique, 43, n°2 (1936), 211–228 ニ於テ K. Löwner ノ所論ヲ全ク別ナ方法即チ K. Löwner ノヤウナ力學的ナ考ヘヲ用ヒズニ（Löwner ハアル微分方程式ヨリ出發シタ），純幾何學的ナ方法ヲ用ヒテ同ジ理論ヲ再建シタ。Basilewitch ニ從ヘバ，Löwner ノ出發セル微分方程式ニ相當スル式ガ稍々異ナル形ニ於テ誘導サレル*。

シカモコゝニ表ハレテ来ル $K(\tau)$ ハ $(-\infty, 0)$ デ定義サレテヰテ（コレハ本質的ニ Löwner ト変リナイコトデアル）$K(\tau)=e^{i\theta(\tau)}$ トオケバ，コノ $\theta(\tau)$ ノ意味ガ Löwner ノト少シチガフヤウデアリ、シカモ係数表示式ガ同ジデアル。Basilewitch ハ (1) ヨリモ一般ニ $s=1,2,\cdots\cdots$ ニ對シ

$$(2)\quad f_s(z)=z+a_{s+1}z^{s+1}+\cdots\cdots a_{ns+1}z^{ns+1}+\cdots\cdots$$

ヲ對稱トシテ、一般的ナ K.Löwner ノ係数表示式ヲ得タ、即チ

$$(3)\quad a_{ns+1}=\sum(-1)^k A^{(s)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}e^{-nt}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau_1}\int_{-\infty}^{\tau_2}\cdots\int_{-\infty}^{\tau_{k-1}}e^{\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu\tau_\nu}\cdot\prod_{\nu=1}^{k}K^{\alpha_\nu}(\tau_\nu)\,d\tau_1 d\tau_2\cdots\cdots d\tau_k,$$

---

*) Löwner ノ様ニ beschränkte schlitzabbildung ヲ用ヒナイカラ。

$$(-\infty < \tau_k \leqq \tau_{k-1} \leqq \cdots\cdots \leqq \tau_1 \leqq t \leqq 0)$$

コヽ＝ $\sum$ ハ $\sum \alpha_\nu = n$ ナルスベテノ自然数 α_ν ニ對シテ行フ、又 $|K(\tau_\nu)|=1$ デアリ $K(\tau_\nu)=e^{i\theta(\tau_\nu)}$ ハ $(-\infty, 0)$ デ連續又ハ有限箇ノ不連續点ヲ有スル函數デアリ，

$$A^{(S)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_k}=\left(\frac{2}{S}\right)^k\cdot\left[(n-\alpha_1)\cdot S+1\right]\cdot\left[(n-\alpha_1-\alpha_2)\cdot S+1\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\left[(n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots\cdots-\alpha_k)\cdot S+1\right]$$

デアル。

Basilewitch ハ *K. Löwner* ノ方法ヲ幾何學的ニ研究成功シタノハ賞讃サルベキハ勿論デアルが，特ニ彼ノ研究ノヨイコトハ，彼ハ彼ノ意味ノ $K(\tau)=e^{i\theta(\tau)}$ ノ幾何學的意味ヲモ分明ナラシメタコトデハナカラウカ、彼ノ研究ニヨリスベテノ (Sch) ノ函数ニハ上ノヤウナ $K(\tau)=e^{i\theta(\tau)}$ ナル函数が一ツ唯一ツ對應シ、又逆ニ集合 $\{\theta(\tau)\}$ ヲ連續又ハ有限箇ノ不連續点ヲ有スル $(-\infty, 0)$ デ定義サレタ函數 $\theta(\tau)$ ノ集リトシタトキニ，$\{\theta(\tau)\}$ ヨリ一ツノ函数ヲ任意ニ取レバ，コレニ對シテ (Sch) ニ属スル函数が對應セシメラレルコト，否モット進ンデソノ函數ノ近似表示ニモ成功シテアツタノデアル（*Basilewitch* 上記論文 §4 ノ最後參照）。コヽニ到ッテ我々ハ次ノ重大ナ（*Löwner* ノ得ラレナカッタ）結論ニ達スル。

$\boxed{\text{定　理}}$**) (Sch) ノスベテノ函數ニハ $(-\infty, 0)$ デ定

**) (S) ノ *Unterklasse* ノ星状函数，凸函数ニハ單調函数が1對1ニ對應スルコトハ知ラレテキル，(*Peschl, Stroganoff*).

義サレタ連續又ハ有限箇ノ不連續點ヲ有スル函數 $\theta(\tau)$ ガ一ツ對應シ, $K(\tau)=e^{i\theta(\tau)}$ トオケバ、係數ハ (3) ニテ表示サレ（今ハ $s=1$）, 逆ニ上述ノ性質ヲ有スル $\theta(\tau)$ ヲ任意ニ與ヘルト, ソレニ應ジテ (Sch) ノ函數ガ一ツ（近似法デ）作レル。

(注意) $\theta(\tau)$ ガ變レバソノ幾何學的意味カラ (Sch) ノ函數モ變ヘル。ダカラ (Sch) ト $\{\theta(\tau)\}$ トハ一對一ノ關係ヲナス。

コンデ筆者ハ Comptes Rendus, 198, (1934), 1569—1571 ニ發表サレタ F. Marty ノ論文: *Sur le module des coefficients de Mac Laurin d'une fonction univalente* ヲ想起セザルヲ得ナイ。

彼ガ言フヤウニ, 今モシ (S) ノ函數 (1) ノ係數 $|a_n|$ $(n=2,3,\text{------})$ ノ Maximum ヲ知ラントセバ (Sch) ノ函數ノミヲ考フレバ足リル（之ハ證明モ出來ル—Marty ノ論文定理 I —— シカシナガラ, K. Löwner ノヤウニ Schlitzapproximation ノ考ヘモアルカラ (Sch) ノ函數ノミヲ無條件デ考ヘルコトモ許サレテヨイ）、ソコデ (1) ノ係數 a_n ハ $|a_n|$ ノ Maximum ニナッテヰルトスル。且ツ又 $a_n>0$ デアルト考ヘル、コレハ $|\varepsilon|=1$ ヲ適當ニ選ンデ $f(z)$ ノ代リニ $\frac{1}{\varepsilon}f(\varepsilon z)$ ヲ考ヘレバソレデ濟ムコトデアル。上ノヤウニシタ後ニ, 今度ハコノ $f(z)$ ニ極メテ近イ (S) ノ函數ヲ作ッテ見ル、コノ爲メニ

$$\varphi(z)=f\left[\frac{e^{i\theta}(z+\alpha)}{1+\bar{\alpha}z}\right], \quad (\theta: \text{reelle}, |\alpha|<1)$$

トオケバ，$\varphi(z)$ ハ $|z|<1$ デ regulär schlicht デ

$$\psi(z)=\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{\varphi'(0)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n z^n$$

ヲ作レバ之ハ (S) ニ属スル。$\alpha\to 0$ ノトキハ $\psi\to \bar{e}^{i\theta}f(e^{i\theta}z)$、ソコデ α ヲ十分小ニトリ，$\alpha, \bar{\alpha}$ ヲ独立変数ノ如ク考ヘテ，上ノ $\varphi(z)$ ヲ $\alpha, \bar{\alpha}$ ノ級数ニ展開シタトスル。

スルト

$$\varphi(z)=f[e^{i\theta}z]+\alpha f'[e^{i\theta}z]e^{i\theta}-\bar{\alpha}z^2 f'[e^{i\theta}z]e^{i\theta}+\cdots\cdots,$$

且ツ

$$\varphi'(0)=e^{i\theta}(1+\alpha\cdot 2a_2 e^{i\theta})_{x}+o(\alpha).$$

依ツテ

$$A_n=\frac{a_n e^{in\theta}+\alpha(n+1)a_{n+1}e^{i(n+1)\theta}-\bar{\alpha}(n-1)a_{n-1}e^{i(n-1)\theta}+o(\alpha)}{e^{i\theta}(1+\alpha\cdot 2a_2 e^{i\theta})+o(\alpha)}$$

$$=e^{i(n-1)\theta}\{a_n+\alpha(n+1)a_{n+1}e^{i\theta}-\bar{\alpha}(n-1)a_{n-1}\bar{e}^{i\theta}+o(\alpha)\}\{1-\alpha\cdot 2a_2 e^{i\theta}+o(\alpha)\},$$

$$\frac{A_n}{e^{i(n-1)\theta}}=a_n+\alpha[(n+1)a_{n+1}-2a_2a_n]e^{i\theta}-(n-1)a_{n-1}\bar{\alpha}e^{-i\theta}+o(\alpha).$$

假定ニヨリ $|A_n|<a_n$ ガ α, θ ノ値ニ拘ラズ成立シナケレバナラヌ、θ ヲ $\theta=0$ ノ近傍デ任意ニ取リ $\alpha=re^{i\omega}$ トオケバ

$$\frac{A_n}{e^{i(n-1)\theta}}=a_n+r[(n+1)a_{n+1}-2a_2a_n]e^{i(\theta+\omega)}$$

$$-r(n-1)a_{n-1}e^{-i(\theta+\omega)}+o(r)$$

トナルガ，之レヨリ假定ニヨッテ

$$(4)\quad \frac{d}{dr}\mathcal{R}\left[\frac{A_n}{e^{i(n-1)\theta}}\right]_{r=0}=0$$

ガ θ ＝無関係ニ成立スルコトガ必要デアル、(4) ヲ計算スルト，

$$a_{n+1}=x_{n+1}+iy_{n+1},\quad a_{n-1}=x_{n-1}+iy_{n-1}$$

トオケバ，

$$(5)\quad \begin{aligned}&\{[(n+1)x_{n+1}-2x_2a_n]-(n-1)x_{n-1}\}\cos(\theta+\omega)\\ &-\{[(n+1)y_{n+1}-2y_2a_n]+(n-1)y_{n-1}\}\sin(\theta+\omega)=0.\end{aligned}$$

(5) ガ θ ＝無関係ニ成立スルタメニハ

$$(n+1)x_{n+1}-2x_2a_n=(n-1)x_{n-1},$$

$$(n+1)y_{n+1}-2y_2a_n=-(n-1)y_{n-1}.$$

即チ

$$(6)\quad (n+1)a_{n+1}-2a_2a_n=(n-1)\overline{a_{n-1}}.$$

(6)ハ $|a_n|$ ヲ Max. ナラシムル Grenzfunktion (1) ノ係數ノ満足スベキ必要ナ條件デアル。

コヽニ於テ，シカシ $K(\tau)=-1$, $(-\infty,0)$ ナル函數ヲ $\{K(\tau)\}$ 中ヨリ偶然持チ來ルナラバ，ソレハ $f(z)$ ニ應ズル $K(\tau)$ ソレ自身デハアルマイカ・何故ナラバ

コノトキハ

$$(7)\quad a_n=n\qquad(n=2,3,\text{------})$$

デアリ (6) ハ満足サレテキル。

附記　以上ハ K. Löwner, J. Basilewitch ノ研究ヲ読ンデノ筆者ノ感想ノ様ナモノデ，諸先輩ノ皆様ノ御教ヲ賜リタイト思フ次第デアリマス。